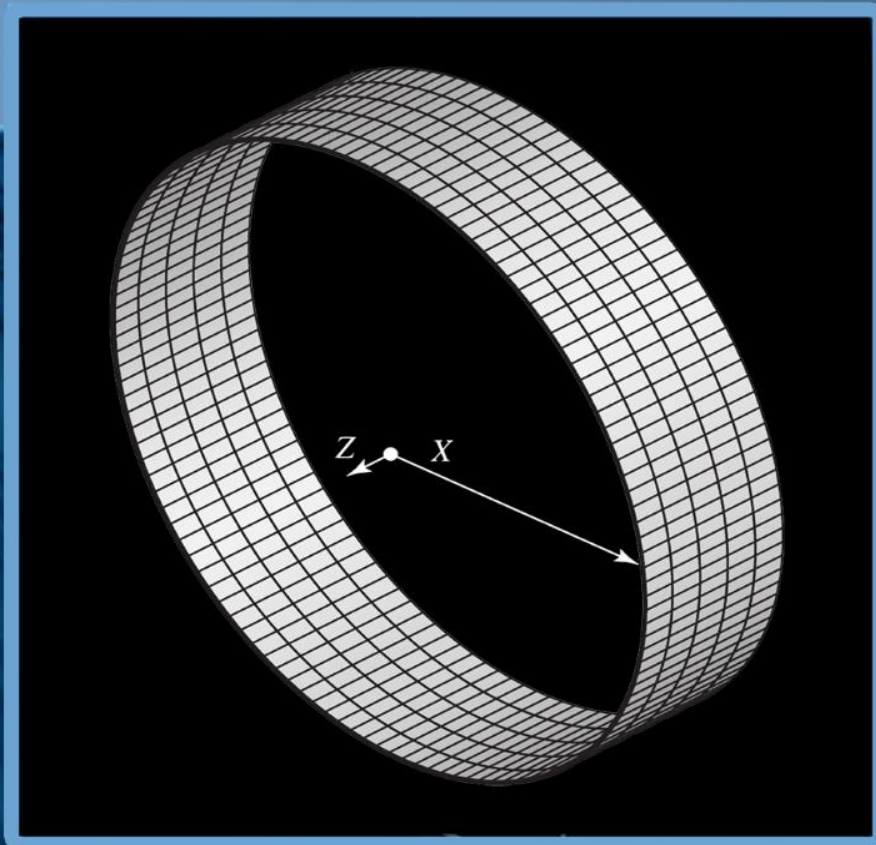


فصل سوم



روش‌های کار و انفرژی

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

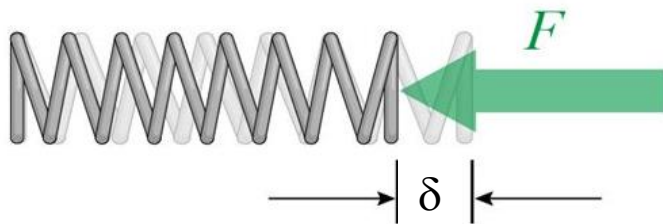
مرجع اصلی:

انرژی کرنش

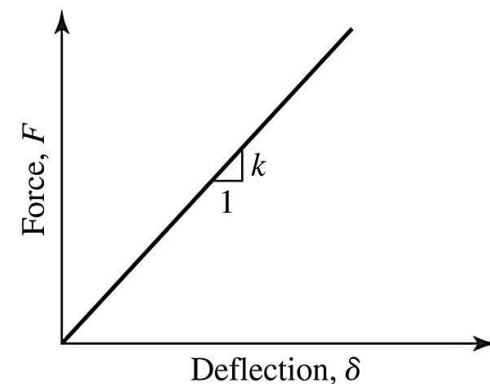
براساس اصل پایستاری انرژی، در صورتی که از اتلاف انرژی بصورت گرما صرف نظر شود، کار انجام شده توسط نیروی خارجی، W ، به ترکیبی از انرژی جنبشی و پتانسیل تبدیل می‌شود.

در حالتی که از حرکت جسم الاستیکی ممانعت شود، همه کار انجام‌شده بصورت انرژی پتانسیل الاستیک در جسم ذخیره می‌شود، که معمولاً با عنوان **انرژی کرنشی**، U_e ، نام برده می‌شود.

$$W = \int_0^{\delta_0} F d\delta = \int_0^{\delta_0} k \delta d\delta = \frac{1}{2} k \delta_0^2 = U_e$$



برای فنر الاستیک خطی:



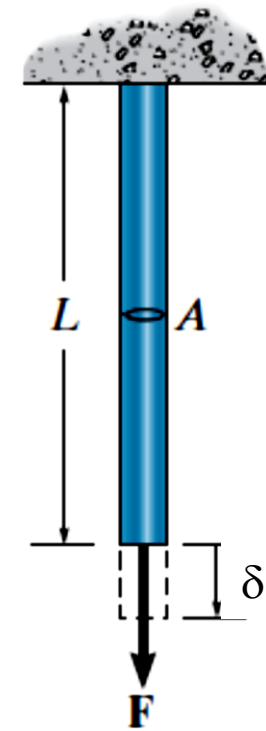
انرژی کرنش

$$U_e = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \delta^2 \quad \text{برای میله الاستیک:}$$

$$U_e = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \left(\frac{PL}{AE} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{A} \right) \left(\frac{P}{AE} \right) AL = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V$$

انرژی کرنشی در حجم واحد می‌باشد، که به چگالی انرژی کرنشی معروف است.

مقادیر تنش و کرنش متناظر با مقدار نهایی نیروی وارده می‌باشند.



$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad \text{برای حالت کلی بارگذاری تک محوری، انرژی کرنشی در واحد حجم } u_e:$$

برای حالت کلی بارگذاری:

$$U_e = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

قضیه‌ی اول کاستیلیانو

برای یک سیستم الاستیک در حال تعادل، مشتق جزئی انرژی کرنشی کل نسبت به تغییر مکان در یک نقطه، برابر با نیروی اعمال شده در جهت تغییر مکان در آن نقطه می‌باشد.

$$U_e = W = \sum_{j=1}^N \int_0^{\delta_j} F_j d\delta_j$$

δ_j : تغییر شکل در نقطه اثر نیروی F_j و در جهت خط اثر نیرو

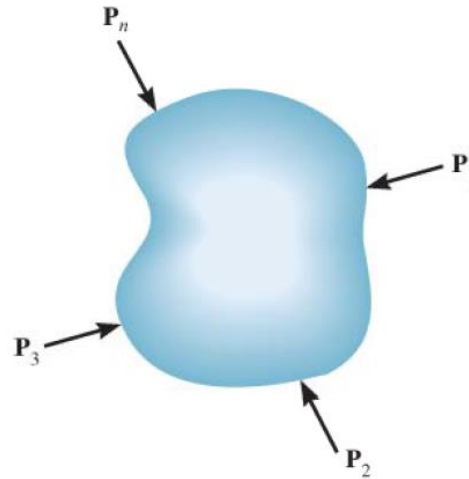
- اگر همه نقاط اعمال بار، بجز یکی مثلاً i ثابت باشند و این نقطه به اندازه بی‌نهایت کوچک $\Delta\delta_i$ توسط نیروی اضافی بی‌نهایت کوچک ΔF_i تغییر شکل دهد، تغییر انرژی کرنشی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta U_e = \Delta W = F_i \Delta\delta_i + \int_0^{\Delta\delta_i} \Delta F_i d\delta_i \quad (۴۵-۲)$$

قضیه‌ی اول کاستیلیانو

برای یک سیستم الاستیک در حال تعادل، مشتق جزئی انرژی کرنشی کل نسبت به تغییرشکل در یک نقطه، برابر با نیروی اعمال شده در جهت تغییرشکل در آن نقطه می‌باشد.

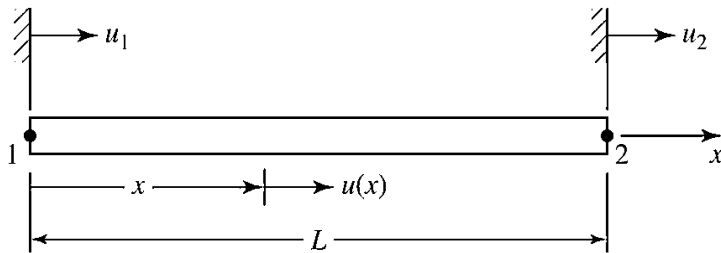
$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i$$



δ_j : تغییرشکل در نقطه اثر نیروی F_j و در جهت خط اثر نیرو

قضیه اول کاستیلیانو

- قضیه اول کاستیلیانو برای فرمولبندی اجزاء محدود ابزار قدرتمندی به‌شمار می‌رود.



- این قضیه اکنون برای المان میله تشریح می‌شود:
انرژی کرنشی المان میله به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V = \frac{1}{2} E \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)^2 AL \quad (48-2)$$

با به‌کار بردن قضیه کاستیلیانو نسبت به هر یک از جابجایی‌ها، نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_1} = \frac{AE}{L} (u_1 - u_2) = f_1$$

$$f_1 = -\frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (49-2)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_2} = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) = f_2$$

$$f_2 = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (50-2)$$

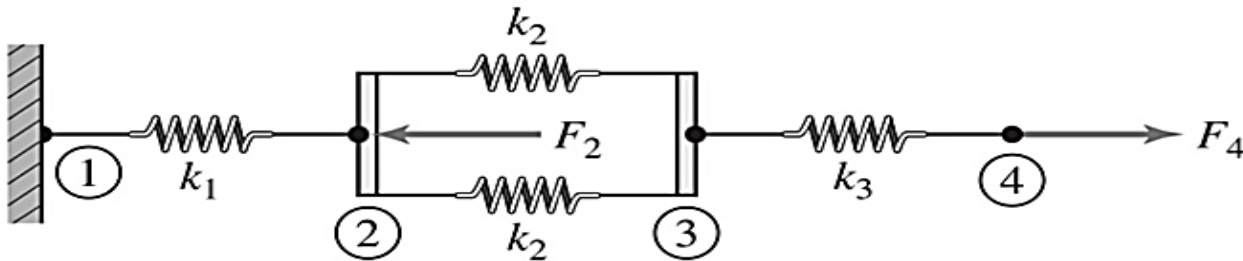
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این روابط مشابه روابط (33-2) و (34-2) می‌باشند.

قضیه‌ی اول کاستیلیانو

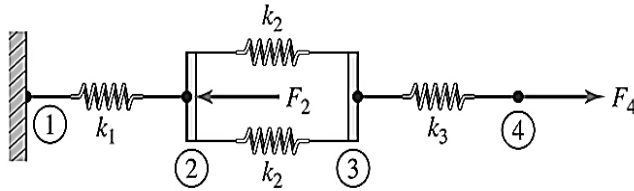
مثال ۱

تغییر مکان گره‌ها و عکس العمل تکیه گاهی را در مجموعه فنرهای شکل زیر به کمک تئوری اول کاستیلیانو بدست آورید.

$$F_4 = 50 \text{ N}$$



سیستم متشکل از چهار المان فنر



قضیه اول کاستیلیانو

حل مثال ۱

سیستم متشکل از چهار المان فنر

(الف) انرژی کرنشی کل سیستم چهار فنری بر حسب جابجایی‌های گرهی و ثابت فنرها به صورت زیر می‌باشد:

$$U_e = \frac{1}{2} k_1 (U_2 - U_1)^2 + 2 \left[\frac{1}{2} k_2 (U_3 - U_2)^2 \right] + \frac{1}{2} k_3 (U_4 - U_3)^2$$

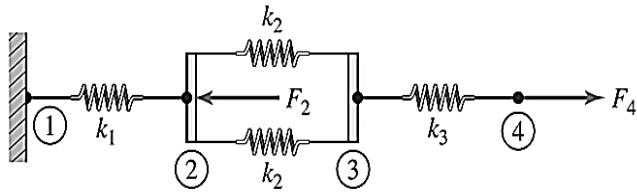
با به کار بردن قضیه اول کاستیلیانو و با استفاده از هر یک از جابجایی‌های گرهی، نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial U_e}{\partial U_1} = F_1 = k_1 (U_2 - U_1)(-1) = k_1 (U_1 - U_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_e}{\partial U_2} &= F_2 = k_1 (U_2 - U_1) + 2k_2 (U_3 - U_2)(-1) \\ &= -k_1 U_1 + (k_1 + 2k_2) U_2 - 2k_2 U_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_e}{\partial U_3} &= F_3 = 2k_2 (U_3 - U_2) + k_3 (U_4 - U_3)(-1) \\ &= -2k_2 U_2 + 2(k_2 + k_3) U_3 - k_3 U_4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial U_4} = F_4 = k_3 (U_4 - U_3) = -k_3 U_3 + k_3 U_4$$



سیستم متشکل از چهار المان فنر

قضیه اول کاستیلیانو

حل مثال ۱

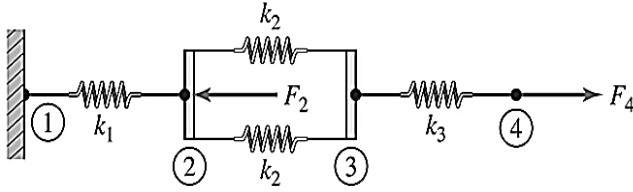
که می‌توان این روابط را به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + 2k_2 & -2k_2 & 0 \\ 0 & -2k_2 & 2k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس سختی سیستم از طریق قضیه کاستیلیانو به دست آمد.

(ب) با جایگذاری مقادیر عددی تعیین شده، دستگاه معادلات به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -30 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix}$$



قضیه اول کاستیلیانو

حل مثال ۱

سیستم متشکل از چهار المان فنر

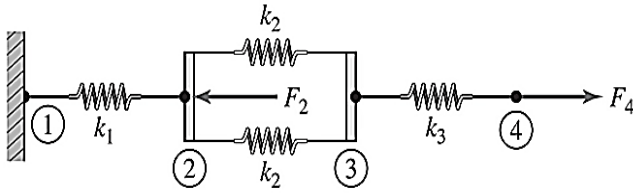
با حذف معادله مقید، دستگاه معادلات حاکم بر جابجایی‌های فعال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 15 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

که با تبدیل ماتریس ضرایب (ماتریس سختی) به یک ماتریس بالا مثلثی، ماتریسی که در آن تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفر هستند، جواب به صورت دستی محاسبه می‌شود.

گام اول - معادله (سطر) اول در ۱۲ و معادله (سطر) دوم در ۱۶ ضرب می‌شود، سپس دو معادله با هم جمع شده و نتیجه در معادله دوم قرار داده می‌شود

$$\begin{bmatrix} 16 & -12 & 0 \\ 0 & 96 & -48 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ -360 \\ 50 \end{Bmatrix}$$



قضیه اول کاستیلیانو

حل مثال ۱

گام دوم - معادله سوم را در ۳۲ ضرب و آن را با معادله دوم جمع کرده، و نتیجه در معادله سوم قرار داده می‌شود. در نتیجه ماتریس بالا مثلی مورد نظر مطابق زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 16 & -12 & 0 \\ 0 & 96 & -48 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ -360 \\ 1240 \end{Bmatrix}$$

در این حالت می‌توان این معادلات را از پایین به بالا حل کرد و مشاهده خواهد شد که در هر گام فقط یک مجهول وجود دارد، بنابراین

$$U_4 = \frac{1240}{48} = 25.83 \text{ mm}$$

$$U_3 = \frac{1}{96} [-360 + 48(25.83)] = 9.17 \text{ mm}$$

$$U_2 = \frac{1}{16} [-30 + 12(9.17)] = 5.0 \text{ mm}$$

نیروی عکس‌العمل در گره ۱ از معادله مقید به صورت زیر به دست می‌آید

$$F_1 = -4U_2 = -4(5.0) = -20 \text{ N}$$

مشاهده می‌شود که تعادل سیستم برقرار است، چرا که جمع نیروهای خارجی مطابق با شرط تعادل برابر صفر می‌باشد.

انرژی پتانسیل حداقل

از میان همه‌ی وضعیت‌های محتمل جابجایی یک جسم یا سازه، تحت بارگذاری خارجی که شرایط مرزی هندسی (جابجایی‌های اعمال شده به سازه) را ارضا می‌کنند، آن وضعیتی باعث ارضا معادلات تعادل و ایجاد تعادل پایدار می‌گردد که در آن وضعیت انرژی پتانسیل کل حداقل باشد.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

اصل انرژی پتانسیل حداقل

از میان همه‌ی وضعیت‌های محتمل جابجایی یک جسم یا سازه، تحت بارگذاری خارجی که شرایط مرزی هندسی (جابجایی‌های اعمال شده به سازه) را ارضا می‌کنند، آن وضعیتی باعث ارضا معادلات تعادل و ایجاد تعادل پایدار می‌گردد که در آن وضعیت انرژی پتانسیل کل حداقل باشد.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad \Pi = \Pi(U_1, U_2, \dots, U_N)$$

جابجایی‌ها

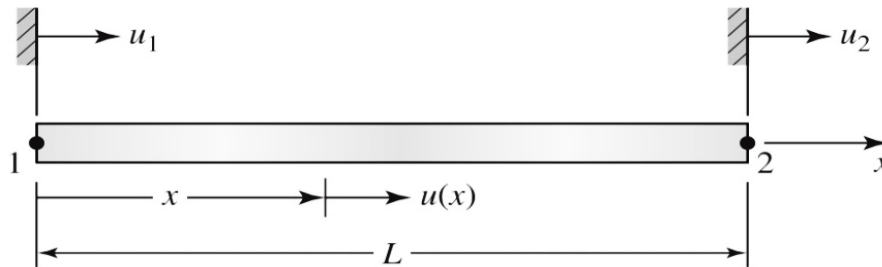
انرژی پتانسیل کل شامل انرژی پتانسیل الاستیک ذخیره شده (انرژی کرنشی) بعلاوه‌ی انرژی پتانسیل نیروهای وارده می‌باشد.

$$\Pi = U_e + U_F$$

کارمکانیکی یک نیروی پایستار به صورت اتلاف انرژی پتانسیل در نظر گرفته می‌شود.

$$U_F = -W \quad \Rightarrow \quad \Pi = U_e - W$$

فرمولبندی جزء محدود میل به اصل انرژی پتانسیل حداقل



$$U_e = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V = \frac{1}{2} E \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)^2 AL$$

$$\Pi = U_e - W$$

$$U_F = -W = -f_1 u_1 - f_2 u_2$$

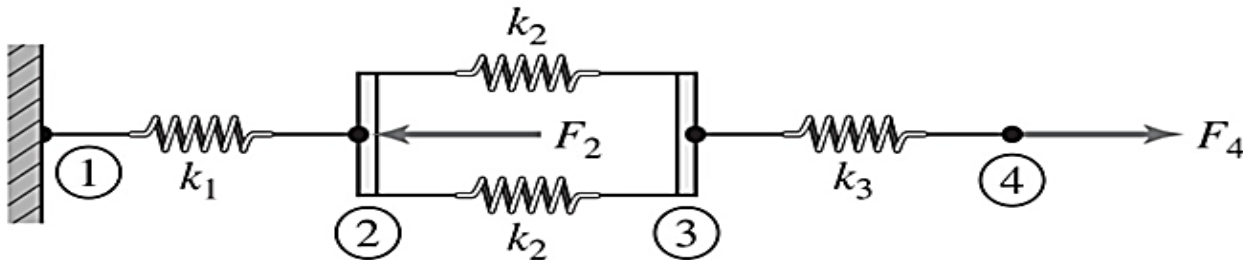
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \rightarrow \frac{AE}{L} (u_1 - u_2) - f_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 \rightarrow \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) - f_2 = 0$$

انرژی پتانسیل حداقل

مثال ۲

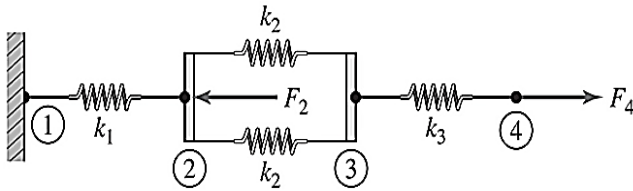
مثال ۱ را مجدداً با استفاده از اصل انرژی پتانسیل حداقل حل کنید. $F_4 = 50 \text{ N}$



سیستم متشکل از چهار المان فنر

انرژی پتانسیل حداقل

حل مثال ۲



بر طبق جواب مثال قبل، انرژی پتانسیل الاستیک برابر است با:

$$U_e = \frac{1}{2}k_1(U_2 - U_1)^2 + 2\left[\frac{1}{2}k_2(U_3 - U_2)^2\right] + \frac{1}{2}k_3(U_4 - U_3)^2$$

و انرژی پتانسیل نیروهای وارده برابر است با:

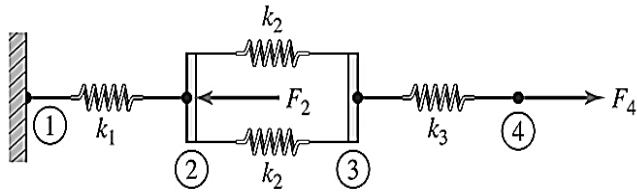
$$U_F = -W = -F_1U_1 - F_2U_2 - F_3U_3 - F_4U_4$$

از اینرو، انرژی پتانسیل کل به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1(U_2 - U_1)^2 + 2\left[\frac{1}{2}k_2(U_3 - U_2)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}k_3(U_4 - U_3)^2 - F_1U_1 - F_2U_2 - F_3U_3 - F_4U_4 \end{aligned}$$

در این مثال، برای استفاده از اصل انرژی پتانسیل حداقل لازم است که مشتقات جزئی زیر محاسبه گردند:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad i = 1, 4$$



انرژی پتانسیل حداقل

حل مثال ۲

بترتیب برای $i = 1, \dots, 4$ معادلات جبری زیر حاصل می‌شوند

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} = k_1(U_2 - U_1)(-1) - F_1 = k_1(U_1 - U_2) - F_1 = 0$$

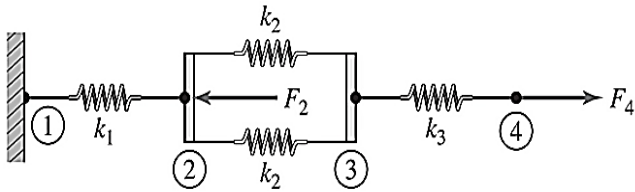
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} &= k_1(U_2 - U_1) + 2k_2(U_3 - U_2)(-1) - F_2 \\ &= -k_1U_1 + (k_1 + 2k_2)U_2 - 2k_2U_3 - F_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} &= 2k_2(U_3 - U_2) + k_3(U_4 - U_3)(-1) - F_3 \\ &= -2k_2U_2 + (2k_2 + k_3)U_3 - k_3U_4 - F_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_4} = k_3(U_4 - U_3) - F_4 = -k_3U_3 + k_3U_4 - F_4 = 0$$

انرژی پتانسیل حداقل

حل مثال ۲



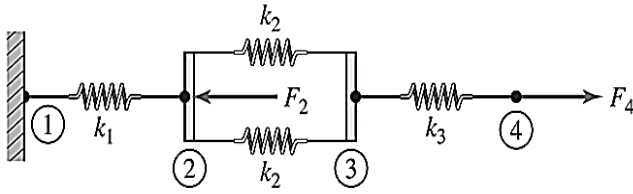
که این معادلات را می‌توان در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + 2k_2 & -2k_2 & 0 \\ 0 & -2k_2 & 2k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که با نتیجه قبل یکسان است. لذا بدلیل اینکه جواب قبلاً محاسبه شده است، در اینجا دستگاه به طور عددی حل نمی‌شود.

انرژی پتانسیل حداقل

حل مثال ۲



اکنون تابع انرژی مثال برای ایجاد فرم کلی‌تری دوباره بررسی می‌شود که این فرم ارزش قابل توجهی برای سیستم‌های پیچیده‌تر مورد بحث در فصول بعد دارد. بردار جابجایی کل یا بردار جابجایی سیستم برابر است با

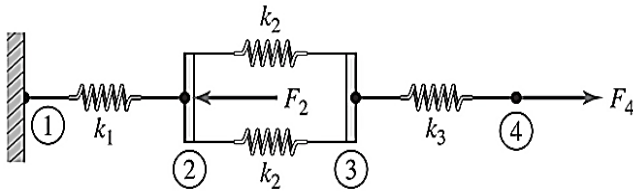
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

و همانطور که به‌دست آمد، ماتریس سختی کل برابر است با

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + 2k_2 & -2k_2 & 0 \\ 0 & -2k_2 & 2k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

انرژی پتانسیل حداقل

حل مثال ۲



اگر مطابق زیر ضرب سه گانه ماتریسی بسط داده شود

$$\frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} = \frac{1}{2} [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4] \times \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + 2k_2 & -2k_2 & 0 \\ 0 & -2k_2 & 2k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$